RIMS 共同研究（公開型）

部分多様体論と幾何解析の新展開

New developments in submanifold theory and geometric analysis

2022 年 6 月 27 日（月）午後 – 6 月 29 日（水）午前

京都大学数理解析研究所 420 号室 & Zoom （ハイブリッド共同研究）

アブストラクト

Z：オンライン（Zoom）での講演

6 月 27 日（月）

13:30–14:30

前田 瞬 (千葉大学)[Z]

題目 ある種の勾配山辺ソリトンとその一般化に対する分類について

概要 R. S. Hamilton は 1980 年代に山辺フローの概念を導入した。勾配山辺ソリトンはこの自己相似解として現れる。勾配山辺ソリトンは田代らにより研究されてきた concircular field をもつリーマン多様体の特別なものと見ることができる。本講演では，非自明な concircular field をもつ 3 次元完備リーマン多様体の分類，特に，非自明な 3 次元完備勾配山辺ソリトンの分類を紹介する。また，部分多様体としてのある種の山辺ソリトンの一般化に対して得られた結果を述べる。

14:45–15:45

中島 直道 (北海道大学)

題目 特異モデルの情報幾何—パラメータ空間の幾何学とその特異性

概要 情報幾何学では，統計モデルや機械学習モデル等のパラメータ空間にフィッシャー計量によりリーマン多様体の構造を入れて，種々の解析を行う．特に，甘利，長岡が導入した双対平坦構造は情報幾何学における主要な空間概念であり，これはリーマン計量と，ある双対性を満たす二種類の平坦アフィン接続から定まるものである．この概念はまた，アフィン微分幾何学におけるヘッセ構造と同一のものである．このような視点により，統計科学や機械学習，最適化問題等への統一的な幾何学的解釈をもたらす．一方，深層学習を含む実応用で現れる様々な空間ではフィッシャー計量が退化し，厳密に言えば，このような場合には双対平坦構造が存在しない．そこで講演者らは，リーマン計量の退化を許容した双対平坦構造の理論の一般化である概ヘッセ多様体の理論を特異点理論の観点から建設し，その理論深化と応用模索を行っている．本講演では，様々な具体例を通して，パラメータ空間に現れる特異性に焦点をあてた情報幾何学の理論の概観と概ヘッセ多様体の理論の紹介を行う．

16:00–17:00

本多 正平 (東北大学)

題目 リッチ曲率が下に有界な空間を固有関数族で球面にはめ込む

概要 部分多様体論における高橋の定理は，閉多様体の固有関数族によるユークリッド空間への等長はめ込みを球面への極小はめ込みで特徴づける．この現象は特異性を許した空間でも成り立つが，結果として特異点は無くなってしまうことを紹介する．そして応用として適当な有限性定理が得られることも紹介する．本講演の一部は Yannick Sire 氏 (Johns Hopkins 大学) との共同研究である．

6 月 28 日（火）

9:30–10:30

秋山 梨佳 (東京都立大学)

題目 Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量の変分問題に関する諸結果

概要 積分幾何のアイデアを用いて, Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量を定式化し, 二重エネルギー汎関数を含む積分不変量の族を構成した. この族の中でも特に, 2 次の斉次多項式から定まるいくつかの積分不変量に着目し, それらの第一変分公式を導出した. この結果により, 二重エネルギー汎関数の Euler-Lagrange 方程式の別表示が得られ, さらに, Euler-Lagrange 方程式が 2 階の偏微分方程式になるという性質を持つ Chern-Federer エネルギー汎関数を見出すことができた. 本講演ではこれらの結果について詳細に報告をする. 本研究は酒井高司氏 (東京都立大学), 佐藤雄一郎氏 (工学院大学) との共同研究に基づく.

10:45–11:45

庄田 敏宏 (関西大学)[Z]

題目 三重周期極小曲面における Morse 指数と符号数の関係について

概要 三重周期極小曲面は界面活性剤の数学的モデルであることが知られており, 90 年代に物理学者たちによって様々な変形族が構成されている. そうした変形族たちを, 幾何的な不変量, 特に Morse 指数と符号数によって分類するという計画を江尻典雄氏と共に進めており, 種数 3 の場合は数値計算を用いて多くの分類を得た. しかし, 種数が 4 以上の場合はほとんど結果がない状況であった. 本講演では極小曲面の Moduli 空間に向きの概念を導入することによって Morse 指数と符号数の関係を記述でき, その応用として種数 4 の例の幾何的量を数学的に特定できることを報告したい.

13:30–14:30

佐藤 雄一郎 (工学院大学)

題目 Riemann 空間形内の Chern-Federer 部分多様体

概要 Riemann 多様体間の写像において調和写像とは，エネルギー汎関数の臨界点を与えるものであり，2 階の偏微分方程式として特徴づけられる．そのエネルギー汎関数は写像の 1 階微分（微分写像）に関する量である．写像の 2 階微分（第二基本形式）に関するエネルギーであって，その臨界点を与える写像が"2 階"の偏微分方程式として特徴づけられるものを発見した．それが Chern-Federer 写像である．本講演では，写像として Riemann 空間形への等長はめ込みであって，Chern-Federer 写像になるものについて得られた結果を報告する．本研究は秋山梨佳氏（東京都立大学），酒井高司氏（東京都立大学）との共同研究に基づく．

14:45–15:45

三浦 達哉 (東京工業大学)

題目 On the Plateau-Douglas problem and Topping's diameter conjecture

概要 Plateau 問題は三次元ユークリッド空間内に与えられた一つの単純閉曲線を境界に持つ連結コンパクト極小曲面の存在を問う問題であり，Rado と Douglas により一般的な存在定理が得られている．一方，複数個の閉曲線を境界に持つ非自明な極小曲面の存在を問う問題は Plateau-Douglas 問題とも呼ばれ，解の存在・非存在は境界曲線の幾何学的情報に強く依存する．本講演では非存在問題に焦点を当て，特に外在的直径を用いた陽的な非存在条件を与える．またこの結果は Topping の直径予想に深く関わっており，実際に Topping 予想が正しければ最適な条件になることも観察する．

16:00–17:00

小池 直之 (東京理科大学)

題目 正則化された平均曲率流のゲージ理論への応用について

概要 無限次元部分多様体の焦点構造は，有限次元部分多様体の焦点構造に比べ，複雑である．それゆえ，一般の無限次元部分多様体を研究することは困難を伴う．そこで，1989 年，C. L. Terng は，(可分な) ヒルベルト空間内で固有フレッドホルム部分多様体という概念を，比較的良い焦点構造をもつ無限次元部分多様体として定義した．その後，2006 年，E. Heintze, X. Liu, 及び, C. Olmos は，各法方向に対する平均曲率が定義可能な固有フレッドホルム部分多様体のクラスを考えた．彼らは，このクラスに属する固有フレッドホルム部分多様体を正則化可能な部分多様体とよんだ．その後，2017 年，ある偏微分方程式を満たす正則化可能な部分多様体の族として，ヒルベルト空間内で，正則化された平均曲率流という概念が筆者によって定義された．本講演の前半部では，正則化可能な部分多様体，及び，正則化された平均曲率流の概念を定義した後，ある種の不変性条件を満たす正則化された平均曲率流の短時間における一意存在性定理を述べる．後半部では，正則化可能な部分多様体と正

則化された平均曲率流のゲージ理論への応用に関する研究の最近の進展について述べることにする.

6月29日（水）

9:00–10:00

河井 公大朗 (大阪公立大学)[Z]

題目 deformed Donaldson-Thomas 接続について

概要 deformed Donaldson-Thomas (dDT) 接続は、G2 多様体上のエルミート複素直線束の接続で calibrated (associative) 部分多様体のミラーと考えられているものである。またこれは高次元ゲージ理論等で現れる G2-instanton の類似とも考えられる。本講演では、これらの背景を紹介したのち、dDT 接続は実際にモジュライ理論や体積汎関数のミラーに関して、associative 部分多様体や G2-instanton と類似した性質を持つことを紹介する。それに関連して考えられる問題も提示したい。本講演の内容は筑波大学の山本光氏との共同研究に基づくものである。

10:15–11:15

山本 光 (筑波大学)[Z]

題目 Solvability of a semilinear heat equation on Riemannian manifolds

概要 In this talk, I explain recent joint work with Jin Takahashi at Tokyo Institute of Technology. We consider a typical nonlinear parabolic PDE on a Riemannian manifold and study its short-time existence starting from a Radon measure. In the case where the manifold is the Euclidean space, many sufficient and necessary conditions of the short-time solvability for the initial Radon measure are known. Our main results generalize these conditions for Riemannian manifolds satisfying some curvature bounds.

11:30–12:30

橋永 貴弘 (佐賀大学)[Z]

題目 3 次元リーマン多様体の 4 次元定曲率空間への局所等長埋め込み

概要 ある generic な仮定の下で 3 次元リーマン多様体が 4 次元定曲率空間に局所等長埋め込み可能となるための内在的量による必要十分条件を紹介する. またその応用として 3 次元リーマン多様体上の warped product 計量や 3 次元リー群上の左不変計量について, 4 次元定曲率空間への局所等長埋め込みに関する結果を紹介する. なお本講演の内容は阿賀岡芳夫氏 (広島大学) との共同研究に基づく.

世話人　本田淳史（横浜国立大学）