

部分多様体のポテンシャル、 エネルギー、留数とメビウス幾何学

千葉大学大学院理学研究科の今井淳氏は、独創的な「結び目のエネルギー」の概念を生み出したことを端緒に、ユニークな研究を行っています。エネルギーの共形不変性から共形不変な、あるいは、メビウス不変な性質や量に関連した研究や、エネルギーの定義における積分の発散（無限大）の「繰り込み」の観点から様々なエネルギーやポテンシャルの定義を与え、さらなる展開を見せています。今回は、これまでの御自身の研究を最近のアップデートな話題まで、セミナーの形式で詳しく話していただきます。

記

講演者：今井淳氏（千葉大学大学院理学研究科）

日 時：2018年2月5日(月) から7日(水) まで

場 所：山口大学理学部

数理科学科プレゼンテーションルーム

(理学部1号館214号室)

日時

2月5日(月) 10:00~17:00 (途中に休憩が入ります)

2月6日(火) 10:00~17:00 (途中に休憩が入ります)

2月7日(水) 10:00~15:00 (途中に休憩が入ります)

連絡先：中内伸光（山口大学理学部）

nakauchi@yamaguchi-u.ac.jp

概要

今回の講演では、以下の5つテーマについて、特に、主として (1), (4), (5) について話していただける予定になっています。

- (1) 結び目のエネルギー（結び目の空間に汎関数を定義して、最適な形を求める）
- (2) メビウス幾何・共形幾何からの観点（不定計量をもつローレンツ空間から始める幾何）
- (3) 結び目のエネルギーの解析的な側面（関数空間、変分、Euler-Lagrange 方程式）
- (4) ユークリッド空間内の領域のポテンシャルと、それで決まる領域の中心（Brunn-Minkowski 不等式や冪凹性などPDEで使われる道具を用いる）
- (5) 部分多様体のエネルギーと留数（解析接続を使い、微分幾何・積分幾何的な量をだす）の概説

参考文献

講演者の webpage

<https://sites.google.com/site/junohara/home>

における

「プレゼンファイル・集中講義ノート」の中の「集中講義ノート加筆版」

を御覧ください。

講演者による研究概要

約25年前結び目のエネルギーの研究を始めた。これは荷電した結び目の静電エネルギーの一般化ともいうべきもので、各結び目型の最適な形を求めるために導入した。それ以来の問題意識は、ある幾何学的対象の空間の上に、ある意味で幾何学的な複雑さを測るような、大域的に定義される汎関数を導入し、それに関するある種の幾何学的最適問題を研究することが主なものである。結び目のエネルギーの研究から次の二つの研究が派生した。

A 結び目の大域的な複雑さの研究と発散するポテンシャルの有限部分 (Hadamard 正則化) : 結び目のエネルギーの導入の動機は、結び目全体のなす空間上に「エネルギー」を定義することにより、各結び目型の「最良な形」を、その中でエネルギーを最小とする元 (以下、エネルギー最小結び目と呼ぶ) として与えることができるか、という問題 (福原、作間) である。最初の例は、荷電した結び目の静電エネルギーの一般化として得られる (J. O'Hara, *Topology* 30 (1991))。

エネルギーは結び目の各点でのポテンシャル (電位の一般化) を、結び目の上で積分して得られる。ところが、各点のポテンシャルは、その点からの距離の (-2) 乗の結び目 K 上の積分で与えられるが、この積分はそのままでは発散してしまう。

一般に、ある積分が発散するとする。このとき、積分領域の内、その上で積分が発散する部分を考え、その ε 近傍を取り除いた領域上で積分したものを ε で展開し、得られた級数の定数項を取ることで、有限の量を取り出すことができる。このように、発散する積分から有限な量を取り出す操作は、超関数論で Hadamard の正則化と呼ばれる。

M.Freedman たち (*Ann. of Math.* 139 (1994)) は、このエネルギーがメビウス変換で不変であることを示し (このためこのエネルギーは結び目のメビウスエネルギーと呼ばれることがある)、それを用いて、素な結び目型にはエネルギー最小結び目が存在することを示した。一方、合成結び目型においては Kusner と J.Sullivan が数値実験などから、存在しないと予想している。

その後、このエネルギーを拡張し、任意の結び目型に、エネルギー最小結び目が存在するような結び目のエネルギーの族を与えた。ただし、エネルギー最小結び目の形はエネルギーの種類に依存する。

結び目のエネルギーの研究は、結び目の幾何学的、大域的な複雑さを研究する「幾何学的結び目理論」と呼ばれる分野の発端となった。高分子や DNA の研究にも応用できるため、計算機数学、物理学、生物数学などの研究者も参加する国際研究集会の開催、講究録の出版がコンスタントになされている。また、エネルギー最小結び目の存在とその滑らかさを求める問題は、種々のエネルギー汎関数に適したソボレフ空間の研究、エネルギーの第一、第二変分、Euler-Lagrange 方程式といった、解析的研究 (von der Mosel, Blatt, Reiter, 長澤-石関他) につながった。汎関数がスケール不変な場合とそうでない場合で、解析的な状況が全く異なることが分かってきた。

2009 年以降、福岡大学の柴田先生が提唱した三角形の灯心に触発され、ユークリッド空間のコンパクト部分多様体で全空間と同じ次元のもの (コンパクトボディ) Ω のポテンシャルの 1 変数族を、二点間の距離の s 乗の積分で (発散する場合は上と同様の有限化の手法を用いて) 定義した。これは M.Riesz と Frostman により前世紀前半に研究されたリースポテンシャルの一般化になる。結び目のエネルギーの定義で現れるポテンシャルのある種の拡張にもなっている。

このポテンシャルの最大 (s の値によっては最小) を与える点として領域の r^s -中心を定義した。例えば、重心は r^2 -中心になり、鋭角三角形の外心、内心はそれぞれ r^∞ -中心、 $r^{-\infty}$ -中心になる。特に領域が凸体の場合には、このポテンシャルと r^s -中心は Lutwak に

よる双対体積および Moszyńska による輻射中心になることが分かり、凸幾何学・積分幾何学との関連が生じた。

r^s -中心の存在は適切で自然な仮定の下成立するが、一意性は一般には成立しない。この一意性の必要条件を与えた。また、 r^s -中心の存在しうる範囲を与えるものとして、領域の極小非被折領域という概念を導入した。これは PDE を研究しているイタリアの Magnanini 達が凸領域に対して定義したハートと同じものである（ほぼ同時期に独立に導入した）。

B 曲線と曲面のメビウス幾何学 (Rémi Langevin 氏との共同研究。1999 年～): Langevin 氏は Willmore 予想に取り組んでいて、そのため、メビウス変換で不変になるような量から得られる積分幾何学的な対象を研究していた。結び目のエネルギーの最初の例がメビウス変換で不変になることを発端として、1999 年から、曲線、曲面の大域的な性質・量を、メビウス幾何学の枠組みで共同研究している。

$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \Delta$ (ただし Δ は対角成分) 上の複素 2 次形式 $dw \wedge dz / (w - z)^2$ を無限小非調和比と呼び、これを結び目に、またその実部を一般次元の球面に拡張した (シンプレクティック形式になる)。これは、結び目などのメビウス不変でかつ大域的な量を定義するとき重要な役割を果たす。

部分球面の集合にはメビウス不変な擬リーマン構造が入る。この不定値計量を使って積分幾何的な手法を用い、結び目の新しいエネルギーを定義し、これを無限小非調和比を用いて表し、このエネルギーで自明な結び目と非自明な結び目を区別できる、という Fary-Milnor タイプの定理を得た (Langevin and O'Hara, J. Inst. Math. Jussieu 4 (2005))。また、局所的な量に関しても、擬リーマン多様体の中の零的曲線の $\frac{1}{2}$ -次元の弧長要素を定義し、その応用として、空間曲線の共形的曲率の新たな定式化を得た (同, Comm. Math. Helv. 85 (2010))

最近の研究: X をユークリッド空間のコンパクト部分多様体 (閉部分多様体またはコンパクトボディ) とし、 $X \times X$ 上距離の z 乗の積分を考える。これは $z \in \mathbb{R}$ のときは $z > -\dim X$ のとき well-defined で、 X がコンパクトボディで $-\dim X < z < 0$ のとき Riesz の z -エネルギーと呼ばれている。ここで $z \in \mathbb{C}$ とし、解析接続で定義域を \mathbb{C} 全体にすると、1 位の極のみを持つ有理型関数が得られる。これを X の Brylinski ベータ関数と呼ぶことにする。 z が極ならば適切に正則化した値、そうでない場合はそのままの値は、Hadamard の有限部分と一致する。これを generalized Riesz z -energy と呼ぶことにする。 X が結び目で $z = -2$ のときは、結び目のメビウスエネルギーと一致する (Brylinski)。

Brylinski ベータ関数の留数から、微分幾何・積分幾何的に面白い量が得られる。例えば、 X が \mathbb{R}^3 の閉曲面で $z = -4$ の場合、Willmore 汎関数が得られる (Fuller-Vemuri)。Gil Solanes 氏との共同研究で、コンパクトボディの Brylinski ベータ関数の留数を求め、奇数次元閉部分多様体の generalized $(-2 \dim X)$ -energy はメビウス不変であることを示した。

Brylinski ベータ関数 (の留数) で、ボール、円周、(ある条件下で) 2 次元球面が特徴づけられることが分かった。このことから、2 点間距離分布によってもボール、円周、(ある条件下で) 2 次元球面が特徴づけられることが従う。また、積分幾何学で重要な内在的体積が、コンパクトボディの次元が 2, 3 の場合は、ベータ関数と相対ベータ関数 ($\Omega \times \partial\Omega$ 上距離の冪乗を積分したもの) の留数から得られることが分かった。

E-mail: ohara@math.s.chiba-u.ac.jp