研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」
―　Willmore 曲面について　―
講演題目・要旨

安藤 直也（熊本大学）“Willmore 球面について”

E^3 内の Willmore 球面は, 無限遠点で正則でありかつエンドが平坦である完備な極小曲面のある反転による像のコンパクト化であることが, Bryant によって証明されている. 本講演の目的は Bryant によるこの結果について解説することである.

第１部 (S^3 内の曲面の共形 Gauss 写像)
S^3 内の曲面 S に対し, 共形 Gauss 写像と呼ばれる S から４次元 de Sitter 空間 S^4_1 への写像 γ が定義される. S の非臍点の集合を $\mathrm{Reg}(S)$ で表すとき, S が Willmore 曲面であることと, γ の $\mathrm{Reg}(S)$ への制限に関する平均曲率ベクトルが恒等的に零であることは同値であることがわかる.

第２部 (Willmore 曲面上の正則４次微分)
S^3 内の Willmore 曲面 S 上にある正則４次微分 Q が定義される. Q が恒等的に零であるならば, S の共形 Gauss 写像 γ に関する光的法ベクトル場の一つ ν が一定方向を向いていることがわかり, 従って ν は S^3 の１点 p_0 を定める. γ の定義から, S の各点で S に接しかつ平均曲率が等しい球面の一つは p_0 を含むことがわかる. S が S^2 に同相である場合 Q は恒等的に零であるので, E^3 内の極小曲面に関する考察を経て, 上述した Bryant の結果を得ることができる.

第３部 (射影平面と同相である曲面に対する Willmore 汎関数の値の下限)
Li-Yau は, S^n 内のコンパクトな曲面 S の n-共形面積は S の面積と S 上の Laplacian の第１固有値の積以上であることを示し, また S に対する Willmore 汎関数の値は n-共形面積以上であることを示した. S が射影平面と同相であるとする. $n \geqq 4$ ならば, S の n-共形面積は 6π であることがわかる. 一方, $n = 3$ ならば, S の 3-共形面積は 12π 以上であることがわかり, 従って S に対する Willmore 汎関数の値も 12π 以上である. Kusner は Willmore 汎関数の値がちょうど 12π である射影平面と同相な曲面を発見した. この曲面は Willmore であり, E^3 内の無限遠点で正則でありかつエンドが平坦である完備な極小曲面の一つによって与えられる.

守屋 克洋（筑波大学）“リーマン面上の四元数的正則直線束とウィルモア曲面”

リーマン面上の四元数的正則直線束の理論は四次元球面内の曲面の共形幾何学を記述するのに用いられる。これを用いるとウィルモア曲面についてどのようなことが分かるかを初歩から解説する。

川上 裕（山口大学）“Willmore 予想について”

Willmore 予想とは，3 次元 Euclid 空間内のトーラス上における Willmore 汎関数の最小値は $2\pi^2$ であり，その値を取るのは，中心 1，半径 $\sqrt{2}$ の円を回転させて得られる回転トーラスであり，かつそれに限るということを主張する命題である．この予想の解決をめぐって，これまで様々なアプローチで研究されてきたが，最近，F. C. Marques と A. Neves によって，この予想に対する新たなアプローチが示された．本講演では，Willmore 予想に関する Marques と Neves の結果を概観する．

大仁田 義裕（大阪市立大学）“TBA”